

Systemy 12-, 15- i 60-kowe a 10-tny – 1

31 października 2021

Od pewnego czasu spotykam się na różnych portalach i na YTube z przedziwnymi tezami o wyższości matematyki opartej na systemach 12-tkowym, 15-tkowym a nawet 60-tkowym nad tym ponoć „zmanipulowanym” systemem 10-tnym, w którym wszystko jest ponoć trudno policzyć. Zaintrygowało mnie to i przysłuchiwałem się argumentom, bo pracuję jako inżynier i obliczenia to moja codzienność. Z matematyką też nie jestem na bakier, jako że to olimpiady z matematyki i z fizyki dały mi bez egzaminu wstęp na dowolne techniczne studia w Polsce. Więc zaczynamy.

Oto tezy do zbadania (dodam, że nie wszystkie baz sensu)...

Teza 1 – manipulowana nieprawdziwa matematyka

Ktoś kto to twierdzi zapomniał, że matematyka ma bardzo wiele dziedzin. Posługiwanie się liczbami to jeden tylko maleńki dział zwany [arytmetyką](#).

Cała reszta ogromu gmachu matematyki, które służą opisywaniu zależności w samej matematyce, w astronomii, chemii, biologii, elektryce, ciepłownictwu, propagacji fal ... – czyli w sumie szeroko pojętej fizyce nie zajmuje się tym jak zapisujesz liczby, jakiego systemu liczenia użyjesz. Rachunek różniczkowy, całkowy, transformacja Fouriera, transformacja Laplace’a, rachunek prawdopodobieństwa i mnóstwo innych – nie używają i nie specyfikują systemu liczenia.

Jeśli na papierze liczysz to będzie pewnie system dziesiętny, a jeżeli na komputerze to zapewne dwójkowy. Wynik jednak zawsze będzie opisywał dokładnie tę samą wielkość. Matematyka daje ścisły język do opisu zależności między zjawiskami –

wzory. Jak je policzysz to już każdego osobista sprawa. Możesz użyć dowolnej arytmetyki. Gdyby tak nie było to przy wzorach byłoby zastrzeżenie, że „wzór musi być liczony tylko w np. systemie 12-tkowym”. Takie zastrzeżenie można sobie wyobrazić tylko w... arytmetyce, bo to tylko ten dział tym się zajmuje.

Wynik: teza fałszywa.

Teza 2 – arytmetyka 12,15,60-tkowa jest dokładniejsza w obliczeniach

To zależy co liczymy, a właściwie jak używamy arytmetyki. Jeśli wiemy jak poprawnie używać arytmetyki to każdy system liczenia jest tak samo dokładny. Wszystkie systemy są 100% tak samo dokładne w obliczeniach dających wynik całkowity, czyli mnożenie, dodawanie, odejmowanie, potęgowanie, silnia... Inaczej sprawa ma się z dzieleniem, kiedy otrzymujemy ułamki. Zapis ułamków w rozwinięciu po przecinku może być nieskończony i ucięcie tego zapisu wprowadza obliczeniowy błąd.

Weźmy pod lupę np. system 12-tkowy:

A) Zapis $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ dziesiętnie = 0,33333...

$\frac{1}{3}$ dwunastkowo = 0,4 dokładnie – wynik dokładny bez obcinania cyfr.

No dobrze, system 12-tkowy pokazał tu przewagę. Testujmy dalej, np. $\frac{1}{5}$.

B) Zapis $\frac{1}{5}$

$\frac{1}{5}$ dziesiętnie = 0,2 dokładnie

$\frac{1}{5}$ dwunastkowo = 0,249724972497... – i trzeba zapis uciąć. Albo zaokrąglić do 0,25, ale to już zaokrąglenie a nie dokładna wartość.

Punkty A i B pokazują, że wszystko zależy z jakim ułamkiem

mamy odczynienia. Zależy czy mianownik ułamka jest dzielnikiem liczby systemu liczenia czy nie. Jak nie jest dzielnikiem, to rozwinięcie będzie nieskończone. Jednak znając arytmetyczne metody zapisu liczb można zapisać oba przypadki zawsze dokładnie:

$\frac{1}{3}$ dziesiętnie = 0,3(3) dokładnie

$\frac{1}{5}$ dwunastkowo = 0,2(4972) dokładnie

Dlatego w tej kwestii nie ma zwycięscy. Żaden system liczenia nie jest ani bardziej dokładny ani mniej. Zależy to tylko od nas samych, ile cyfr chcemy praktycznie policzyć. Ponadto zapis każdej liczby wymiernej (która jest ułamkiem całkowitych wartości) da się zapisać DOKŁADNIE w rozwinięciu po przecinku zaznaczając co jest jej okresem w nawiasach.

Moje praktyczna uwaga: kiedy ja liczę i badam proporcje liczb całkowitych, które się nakładają i nawarstwiają w bardziej złożone liczby to pozostawiam je w postaci zapisu ułamkowego. Prowadzę obliczenia w ułamkach. Obliczam wartość tego ułamka dopiero na samym końcu dla ostatecznego wyniku. Stąd poprzez wszystkie obliczenia mam liczby całkowite a te nie są w ogóle wrażliwe na system zapisu jakiego się używa.

Wynik: teza fałszywa.

Teza 3: To co nie da się zapisać dokładnie dziesiętnie da się w innym systemie

Czyli liczby rzeczywiste kontra wymierne. Jest to pogłębienie tezy 2 bo odpowiedź o dokładność obliczeń jeszcze nie jest wyczerpana, bowiem większość liczb rzeczywistych nie jest liczbami wymiernymi!

Otóż pytanie w tej tezie idzie głębiej: „czy korzystamy na zapisie liczb niewymiernych stosując inny system liczenia?”.

Byłoby tak gdyby w jakimś systemie liczenia dana liczba niewymierna dała się zapisać jako skończony ciąg lub ciąg z powtarzającym się okresem, który byśmy mogli dokładnie wyeksponować w nawiasach. Do niewymiernych liczb należą takie popularne znane jak Pi, Fi, e, pierwiastek z 2, pierwiastek z 3, ...i wiele innych. Patrz [Stałe Matematyczne](https://pl.wikipedia.org/wiki/Lista_sta%C5%82ych_matematycznych) [https://pl.wikipedia.org/wiki/Lista_sta%C5%82ych_matematycznych].

Popatrzmy na to w ten sposób: Jeżeli da się jakąś liczbę zapisać z powtarzającym się okresem w systemie liczenia o podstawie „P”, to wystarczy ją przemnożyć przez potęgę podstawy liczenia na tyle dużą, by cyfry w okresie otrzymać zaraz po przecinku.

Weźmy przykład zapisu takiej liczby, gdzie „abcd...” to cyfry w okresie:

$$L = z.y(abcd...)$$

Część stała liczby z i y nie są istotne, istotny jest okres (abcd...). Pytanie jest czy w jakimś systemie liczenia „P” jest to zapis niewymiernej liczby. Przeskalujmy tę liczbę tak, by okres jej zaczynał się zaraz po przecinku:

$$L = (zy + 0.(abcd..)) / P^k$$

k oznacza ilość cyfr „y”. Znak „^” oznacza potęgowanie.

Ponieważ zy jest całkowita, więc pozostaje zbadać tylko czy okresowy ciąg cyfr jakiegoś systemu liczenia 0.(abcd...) może być niewymierny, czyli może dokładnie zapisać liczbę niewymierną. Wtedy ten system miałby znaczącą przewagę w dokładności obliczeń. Niech „n” oznacza ilość cyfr okresu „abcd...”

$$\begin{aligned} L2 = 0.(abcd...) &= abcd... / P^n + abcd... / P^{(2*n)} + abcd... / P^{(3*n)} + abcd... / P^{(4*n)} + ... \\ &= abcd... * (1/P^{(1*n)} + 1/P^{(2*n)} + 1/P^{(3*n)} + 1/P^{(4*n)} + ... \end{aligned}$$

Ponadto oznaczmy:

$$L1 = zy / P^n$$

Czyli:

$$L = L1 + L2$$

L1 jest wyrażone ułamkiem liczb całkowitych, więc jest z oczywistych względów liczbą wymierną.

By zapisać liczbę L2 dokładnie:

$$L2 = abcd... * \text{Suma}(1/P^{(i*n)}, \text{ dla } i = \text{od } 1 \text{ do nieskończoności})$$

Podstawmy „x” za „P^n”, wtedy zapis się upraszcza. Ponadto podstawmy „A” za liczbę abcd...:

$$L2 = A * (1/x + 1/x^2 + 1/x^3 + 1/x^4 + \dots)$$

$$L2 = A * \text{Suma}(1/X^{(i)}, \text{ dla } i = \text{od } 1 \text{ do nieskończoności})$$

Zauważmy, że „A” i „x” są liczbami całkowitymi. Zagadką pozostaje tajemnicza suma „S” odwrotności potęg:

$$S = \text{Suma}(1/x^{(i)}, \text{ dla } i = \text{od } 1 \text{ do nieskończoności})$$

Ale kto umie dzielić wielomiany zauważ, że:

$$S * (x-1) = x*S - S = x*(1/x + 1/x^2 + 1/x^3 + 1/x^4 + \dots) - (1/x + 1/x^2 + 1/x^3 + 1/x^4 + \dots)$$

Policzmy sam iloczyn x*S:

$$x*S = x*(1/x + 1/x^2 + 1/x^3 + 1/x^4 + \dots)$$

$$= x/x + x/x^2 + x/x^3 + x/x^4 + \dots$$

$$= 1 + (1/x + 1/x^2 + 1/x^3 + 1/x^4 + \dots)$$

$$= 1 + S$$

Piękne prawda?

$$x*S = 1 + S$$

Więc podstawmy to pod L2:

$$\begin{aligned} L2 &= A * S \\ &= A * S(x-1) / (x-1) \\ &= A * (x*S - S) / (x-1) \\ &= A * (1 + S - S) / (x-1) \\ &= A * 1 / (x-1) \\ &= A * 1 / (P^n - 1) \end{aligned}$$

Tak więc L2 udało się wyrazić jako ułamek liczb całkowitych:

$$L2 = A * 1 / (P^n - 1)$$

Liczby całkowite są całkowite bez względu na wybrany system liczenia z podstawą całkowitą. Ten ułamek można policzyć teraz w dowolnym innym systemie liczenia i będzie nadal liczbą wymierną.

Wniosek: Liczba wymierna ma zapis okresowy w każdym systemie liczenia.

Wynik: teza fałszywa.

Mamy wynik 0:3. W następnym odcinku zajmiemy się tezą o korzyściach w liczbach pierwszych, a potem, gdzie na prawdę jest korzyść i to was zaskoczy oczywistą ta korzyść jest.

Autorstwo: Swami Saishiva (Mirek Kobak)

Źródło: WolneMedia.net